## • Ο συμβολισμός των μεταβολών

Γνωρίζουμε από τη συνάρτηση Lagrange ότι:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial a} \, dx$$

και ζητάμε τα ακρότατα του ολοκληρώματος $J[y]$ δηλαδή τα σημεία για τα οποία το $J[y]$ δεν μεταβάλλεται.

Συμβολίζουμε αυτή τη μεταβολή ως:

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial a} da = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \underbrace{\frac{\partial y}{\partial a} da}_{\delta y} \, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \, dx$$

Η συνθήκη για ακρότατα γράφεται:

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0$$

και επομένως:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \delta f \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right) dx$$

Παραγοντική απόκλισης $\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \, dx = 0$

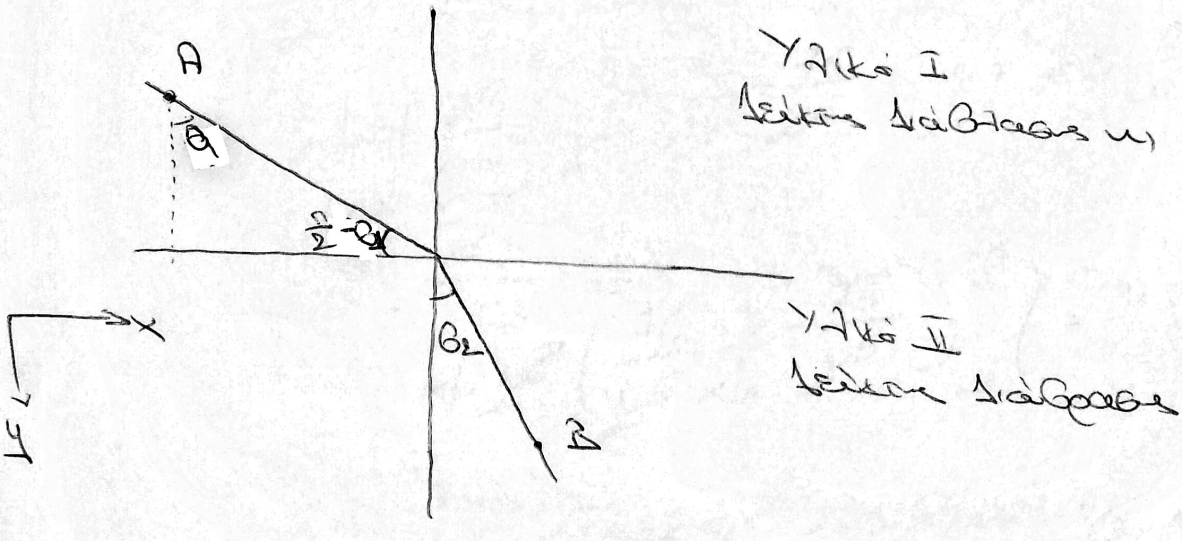
Άρα, για την τυχαία μεταβολή $\delta y$: $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$

Παράδειγμα ①

Ο νόμος του Snell και η αρχή του Fermat:

Αρχή του Fermat:

Το φως οδεύει μέσω της διαδρομής που ελαχιστοποιεί το χρόνο που διανύει.




Η ταχύτητα του φωτός είναι $\boxed{u = \frac{c}{n}}$

c είναι η ταχύτητα όταν $n=1$

Από την αρχή του Fermat πρέπει να ελαχιστοποιήσω το χρόνο μετάβασης από το σημείο A στο σημείο B.

Δηλαδή: $t = \int_A^B \frac{ds}{u} = \int_A^B \frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{u} = \int_A^B \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{u} dx$

**Παρατήρηση**

Η ταχύτητα $u$ στο παρονομαστή δεν είναι σταθερή, διότι εξαρτάται από τον δείκτη διάθλασης.

$$f(y, y', x) = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{u} \quad \text{και προφανώς} \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Όμως $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = c_1$ σταθερή

- $$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \cdot \frac{1}{u} = c_1$$

$y' = \tan\theta$, άρα $$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \frac{1}{\frac{c}{u}} = c_1 \Rightarrow \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \frac{u^2}{c^2} = c_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}} \frac{u^2}{c^2} = c_1^2 \Rightarrow \sin^2\theta \cdot u^2 = c_2 \quad \text{ή}$$

$\boxed{\sin\theta \cdot u = c_3}$ δηλαδή $\sin\theta_1 \cdot u_1 = \sin\theta_2 \cdot u_2$ νόμος Snell

## Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία (0,0) και (1,1) και ελαχιστοποιεί $I[y]=\int_0^1 \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y^2\right]dx$.

Να βρεθεί επίσης η ελάχιστη τιμή του ολοκληρώματος και η τιμή $I[y=x]$.

### Λύση

$$f(y,y',x)=(y')^2-y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \Rightarrow -2y-\frac{d}{dx}(2y')=0$$

$$\Rightarrow -2y-2y''=0 \Rightarrow y''+y=0 \Rightarrow y=A\sin x+B\cos x$$

↳ διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ A\sin 1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{\sin 1} \\ B=0 \end{cases}$$

Τελικά: $\boxed{y=\frac{\sin x}{\sin 1}}$

Η ελάχιστη τιμή του ολοκληρώματος είναι:

$$I[y]=\int_0^1\left[(y')^2-y^2\right]dx=\int_0^1\left[\frac{\cos^2 x}{\sin^2 1}-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 1}\right]dx$$

$$= \frac{1}{\sin^2 1}\int_0^1 (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \frac{1}{\sin^2 1}\int_0^1 \cos(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2 1}\sin(2x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\frac{\sin(2)}{\sin^2(1)} = \frac{2\sin 1\cos 1}{2\sin^2 1} = \cot 1$$

$$= 0,642$$

$$I[y=x] = \int_0^1 \left[(y')^2 - y^2\right] dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} = 0,666$$

Προφανώς $I[y=x] > 0,642$

Ερώτηση:

Έχει φυσική σημασία η άσκηση που λύσαμε;

Θεωρούμε το συναρτησοειδές:

$$I[y] = \int_0^1 \left[(y')^2 - y^2\right] dx \quad \text{ή} \quad I[x] = \int_0^1 \left[(\dot{x})^2 - x^2\right] dt$$

$x = x(t) = \dfrac{\sin t}{\sin 1}$.

Αν θεωρήσω ένα υλικό σημείο μάζας $m=2$ που κινείται βάσει του νόμου Hooke με σταθερά $k=2$ τότε η κινητική ενέργεια είναι:

$$T = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}\cdot 2(\dot{x})^2 = (\dot{x})^2$$

Ενώ η δυναμική: $V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}2x^2 = x^2$

Από το νόμο του Newton: $F = -kx = -2x$ και

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow 2\ddot{x} = -2x \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + x = 0}$$

Η αρχή της στάσιμης δράσης: (stationary action)

Ένα υλικό σημείο-σωματίδιο που ξεκινάει από σημείο A τη χρονική στιγμή $t_A$ και καταλήγει στο σημείο B τη χρονική στιγμή $t_B$, ακολουθεί τη διαδρομή για την οποία η ποσότητα $S = \int_A^B L\,dt$ είναι στάσιμη (στάσιμη με την έννοια του ακροτάτου). Η ποσότητα

$L = E_{κιν} - E_{δυν} = T - V$ είναι η συνάρτηση Lagrange

ή λαγκρατζιανή του συστήματος

Παρατήρηση

Η συνάρτηση Lagrange του συστήματος δεν αντιστοιχεί στη συνολική ενέργεια του συστήματος. Η συνολική ενέργεια είναι $E = T + V$ και όπως θα δούμε παρακάτω αποτελεί σταθερά ή το πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης.

Παράδειγμα ③

Υλικό σημείο που κινείται με σταθερή ταχύτητα και δεν επιδρούν σε αυτό άλλες δυνάμεις έχει συνάρτηση Lagrange: $L = \frac{1}{2} m u^2$.

Παρατήρηση

Ο τρόπος με τον οποίο ορίζουμε τη συνάρτηση Lagrange είναι αρκετά δεσμευτικός διότι πρέπει να

- ορίσουμε και τη δυναμική ενέργεια του συστήματος. Αυτό όμως γίνεται σε συντηρητικά πεδία, αν δηλαδή στο σύστημα υπάρχει παράδειγμα τριβής, ώστε η μηχανική ενέργεια (= T+V) να μην διατηρείται δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτό το φορμαλισμό. Γενικά, σε μια διάσταση μπορεί κανείς να γράψει: $T = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2$
- $V = V(x) = -\int f(x)\,dx$ και άρα

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - V(x)$$

Τότε: $L = L(x, \dot{x}, t)$ και οι εξισώσεις Euler είναι

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} = 0}$$

## Παράδειγμα (4)

Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης υλικού σημείου μάζας $m$ που κινείται σε ομογενές βαρυτικό πεδίο.

### Λύση

Υποθέτω ότι το πεδίο είναι στη κάθετη διεύθυνση $z$, δηλαδή $V(z)=mgz$

η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου είναι

$$T=\frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

Συνεπώς:

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz$$

Οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από τις εξισώσεις Euler. Μία για κάθε διεύθυνση.

Δηλαδή έχω ένα σύστημα:

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0 \Rightarrow 0-\frac{d}{dt}\frac{1}{2}m2\dot{x}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=0 \Rightarrow 0-\frac{d}{dt}\frac{1}{2}m2\dot{y}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=0 \Rightarrow -mg-\frac{d}{dt}\frac{1}{2}m2\dot{z}=0$$

Συνοπτικά:

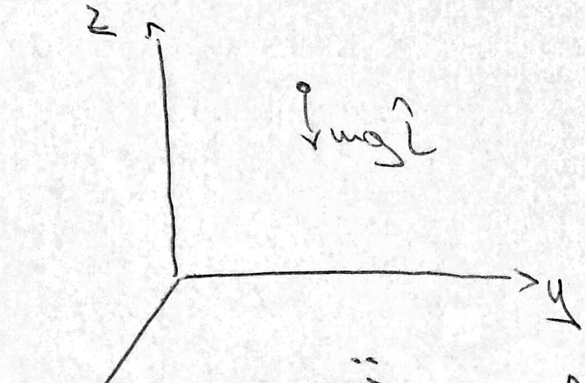
$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$$
$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0$$
$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = -mg$$

$\Longrightarrow$ Αν η μάζα είναι σταθερή:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= -g \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = C_1 t + C_2 \\ \dot{y} = C_3 t + C_4 \\ \dot{z} = -gt + C_5 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = C_3 t + C_4 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + C_5 t + C_6 \end{cases}$$

Με τους νόμους του Νεύτωνα:




$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{k}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

Αντικ/ση:

$$m(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}) = -mg\hat{k} \Longrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

Παρατήρηση ①

Στη μηχανική Lagrange δεν χρειάζεται να βρω τις συνολικές δυνάμεις του συστήματος, αρκεί η συνολική ενέργεια. Και από τις εξισώσεις Euler προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης. Προσέχω το σύστημα να είναι διατηρήσιμο (δηλ. συντηρητικά πεδία)

Παρατήρηση ②

Αν ο νόμος του Νεύτωνα είναι απλούστερος εφαρμόζω τον νόμο του Νεύτωνα. Συνήθως δεν είναι.
Επίσης εφαρμόζω τον νόμο του Νεύτωνα όταν τα πεδία δεν είναι συντηρητικά, δηλαδή έχω τριβές. Τότε η συνολική ενέργεια δεν διατηρείται.

Παρατήρηση ③

Και στις δύο περιπτώσεις έχω τόσες εξισώσεις όσες και οι διαστάσεις του συστήματος. Και στις δύο περιπτώσεις το σύστημα συντεταγμένων είναι από αυ ορίζει η κίνηση ($\vec{r}, \vec{b}, \vec{n}$)